Esercizi

1. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2x_2 + u_2 \end{cases}$$

1.a) Posto $u_1 = u_2 = 0$, trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, studiare la stabilità dell'origine utilizzando il criterio di Lyapunov e la funzione definita positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

1.a) Posto $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, un punto $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio per il sistema se vale la relazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Nel caso in esame si ha

$$\begin{cases} 0 &= -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ 0 &= x_1^2x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0 &= -x_1(1 + 2x_2^2) \\ 0 &= x_1^2x_2 \end{cases}$$

Sono punti di equilibrio tutti quelli appartenenti alla retta $x_1 = 0$, x_2 qualsiasi. Per poter applicare il criterio ridotto di Lyapunov si procede al calcolo dello Jacobiano del sistema

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J}(x_1, x_2)|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente un autovalore a parte reale nulla, il criterio ridotto di Lyapunov in questo caso non permette di affermare nulla riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, il sistema retroazionato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2) \end{cases}$$

Utilizzando la funzione candidata di $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, e derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4x_1^2(1 + x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) < 0$$

Nell'origine, la funzione $\dot{V}$ è definita negativa per cui è possibile affermare che l'origine è un punto asintoticamente stabile.

2. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare quindi l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^T$.

2.b) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo.

2.a) Per portare il sistema nella forma canonica di Jordan occorre calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = (z-1)(z-2)(z+1)$$

Gli autovalori del sistema sono $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ e $z_3 = -1$. I corrispondenti autovettori sono:

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione cercata è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato nella forma canonica di Jordan è il seguente

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k) \\ y(k) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right.$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^T$ è quindi la seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2^k & (-1)^k \\ 0 & 0 & -(-1)^k \\ 1 & 2^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & (-1)^k - 2^k & \\ 0 & -(-1)^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema rimane fermo sullo stato iniziale.

2.b) La funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo si ricava facilmente dalla forma canonica di Jordan

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

3. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + x_2^3 \end{aligned} \right.$$

3.a) Si studi la stabilità del sistema nell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov al variare del parametro α;

3.b) Posto $\alpha = 1$ e utilizzando la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + \beta x_2^2$, si determini se esistono valori per il parametro β che permettano di decidere sulla stabilità o meno del sistema nell'origine.

3.a) L'origine è chiaramente un punto di equilibrio. Lo Jacobiano del sistema è il seguente:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & \alpha \\ -3x_1^2 & +3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Nell'origine gli autovalori dello Jacobiano sono nulli:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2)|_{(0,\,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace

3.b) Derivando la funzione di Lyapunov si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1,\, x_2) &= 4x_1^3\dot{x}_1 + 2\beta x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3(x_1^3 + x_2) + 2\beta x_2(-x_1^3 + x_2^3) \\ &= 4x_1^6 + 4x_1^3x_2 - 2\beta x_2x_1^3 + 2\beta x_2^4 \\ &= 4x_1^6 + 2(2-\beta)x_1^3x_2 + 2\beta x_2^4 > 0 \end{aligned}$$

Per $\beta = 2$ la funzione $\dot{V}(x_1,\, x_2)$ è definita positiva per cui in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che nell'origine il sistema è instabile.

4. Dato il sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\,x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

4.a) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine considerando $u(t) = 0$. Si impieghi il criterio ridotto di Lyapunov e, se necessario, la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ ed il teorema di La Salle–Krasowskii;

4.b Imponendo $u(t) = k_1\,x_1(t) + k_2\,x_2(t)$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

4.a) L'origine è un punto di equilibrio. Lo jacobiano del sistema è:

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ -6x_1^2x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uno degli autovalori è sull'asse immaginario per cui il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace per studiare la stabilità del punto. Se si utilizza la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1,\, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ si ottiene:

$$\dot{V}(x_1,\, x_2) = -4x_1^4(1 + x_1^2) \le 0$$

Essendo $\dot{V}$ semidefinita negativa, si può concludere che il sistema è almeno semplicemente stabile nell'interno dell'origine. L'insieme N dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è

$$N = \{x_1 = 0,\ x_2 \in R\}$$

L'unico punto dell'insieme N che soddisfa le equazioni differenziali del sistema dato è $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Per il teorema di La Salle Krasowskii si può quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

4.b) In presenza della retroazione $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\, x_2(t) + k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t) \end{cases}$$

In questo caso lo jacobiano si trasforma come segue

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ k_1 - 6x_1^2 x_2 & k_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

È chiaro quindi che l'origine è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in R$.

5. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\; y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

5.a) Calcolare gli autovalori del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema. Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

5.b) Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

5.a) La matrice di raggiungibilià del sistema dato è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, il sistema trasformato che si ottiene ha la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile è $\lambda = -1$, quindi un autovalore stabile. È quindi possibile determinare una retroazione dello stato $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo. Il vettore $\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ che posiziona in -2 gli autovalori della parte raggiungibile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) &= \det[s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1} - \overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}] = \begin{vmatrix} s-k_1 & -k_2 \\ -3 & s-3 \end{vmatrix} \\
&= (s-3)(s-k_1) - 3k_2 = s^2 - (3+k_1)s + 3k_1 - 3k_2
\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) = (s+2)^2 = s + 4s + 4$$

occorre utilizzare il vettore

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

Il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ si ottiene applicando la trasformazione inversa

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{k}} & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + k_3 & -7 & k_3 \end{bmatrix}$$

5.b) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è instabile, $\lambda = 3$, per cui non esiste nessun osservatore asintotico dello stato.

6. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

6.a) Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ sia di tipo "dead-beat";

6.b) Per il sistema dato si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.

6.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è non singolare (det$\mathcal{R}^+ = -1$) per cui il sistema è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ che posiziona a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z-1 & -1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

Il polinomio caratteristico desiderato per il sistema retroazionato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}}(z) = z^3$$

La matrice $\mathbf{k}$ si determina, per esempio, utilizzando la formula $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{\text{-}1}]^{\text{-}1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{\text{-}1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{\text{-}1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Un modo alternativo per calcolare il vettore $\mathbf{k}$ è quello di utilizzare la formula di Ackermann:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{q}(\mathcal{R}^+)^{\text{-}1}p(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{\text{-}1}\mathbf{A}^3$$

dove $p(z)$, in questo caso $p(z) = z^3$, è il polinomio caratteristico desiderato. Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\text{-}1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è non singolare, il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{c}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{c}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\mathbf{P}^{\text{-}1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{c} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema trasformato $[\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}(k)]$ è

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

Le matrici $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ vengono partizionate come segue

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 1 & 1 + l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}}(z) = (z-1)(z-1-l_2) - l_1 = z^2 - (2+l_2)z + 1 + l_2 - l_1$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{L}\mathbf{b}_2]u(k)$$

e cioè

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

7. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

7.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

7.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

7.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(k+1) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ \\ y(k) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

7.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 2 \\ l_2 - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)(z-1) - 2(l_1 - 1) = z^2 - (l_1+1)z + l_1 + 2 - 2l_2$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0.5 - l_3 \\ -1 - l_3 \end{bmatrix}$$

8. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

8.a) Calcolare i sottospazi raggiungibili con il solo ingresso u_1, con il solo ingresso u_2 oppure con entrambi gli ingressi. Si dica se il sistema è stabilizzabile con retroazione dello stato tramite un solo ingresso o con entrambi gli ingressi.

8.b) Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

8.a) I sottospazi di raggiungibilià del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono

$$\mathcal{X}_{b1}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{X}_{b2}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = (s-1)^3$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono quindi tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sottospazio di raggiungibilià del sistema è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste una matrice $\mathbf{K}$ di retroazione dello stato tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.

8.b) Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} b_1 & \mathbf{A}b_1 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & e_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionato la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1} = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}} = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

9.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

9.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

9.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.25 & 0.75 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

9.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = (z-l_1)z-(l_2+1) = z^2-l_1z-l_2-1$$

Imponendo $\Delta(z)=z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -0.25+\alpha \end{bmatrix}$$

10. Si consideri il seguente sistema lineare, stazionario discreto $[\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{b}\mathbf{u}(k),\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $\mathbf{y}(k)$ il vettore di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

10.a) Utilizzando l'ingresso $u(k)$ e la sola seconda uscita $y_2(k)$, si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat.

10.b) Si risolva lo stesso problema del punto precedente (stimatore dead-beat di ordine ridotto) utilizzando l'ingresso $u(k)$ ed entrambe le uscite del sistema.

10.a) La matrice di osservabilità del sistema rispetto alla seconda uscita è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore di ordine ridotto. D'altra parte il sistema è già nella forma più idonea per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1+l_1 \\ 1 & 2+l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = z(z-2-l_2)+1-l_1 = z^2-(2+l_2)z+1-l_2$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(k)$$

e cioè

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

10.b) Anche nel caso in cui si utilizzino entrambe le uscite, il sistema è già nella forma opportuna per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che l'unico autovalore della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ sia nullo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \forall\ l_2 \in \mathcal{R}$$

Posto $l_2 = 0$, l'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} v(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \qquad v(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} y(k)$$

11. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

11.a) Portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non raggiungibile.

11.b) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

11.c) Portare il sistema nella forma standard di osservabilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile.

11.d) Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

11.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ sono: $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile del sistema è $\lambda = -1$.

11.b) Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -2 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(\lambda) = \lambda^2 - 1 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_1\tilde{K}}(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & \alpha \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -0.5-\alpha & -4.5-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

11.c) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare, il sistema non è completamente osservabile. Per portare il sistema nella forma standard di osservabilità è possibile utilizzare la seguente matrice di trasformazione:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} -0.5 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

La parte non osservabile del sistema è caratterizzata da un autovalore stabile $\lambda = -1$ per cui è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato sia di ordine pieno che di ordine ridotto.

11.d) Il progetto dell'osservatore di ordine ridotto parte dal calcolo una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{C}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema trasformato che si ottiene assume la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Al punto precedente abbiamo visto che il sistema non è completamente osservabile e certamente la parte non osservabile non è quella relativa alla variabile x_3 perchè tale variabile coincide esattamente con il segnale di uscita $y(t)$. Ne segue che la parte non osservabile è quella relativa alla coppia di matrici $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21})$. Se infatti si calcola la matrice di osservabilità di questa sottoparte, si trova una matrice singolare:

$$\mathcal{O}_1^- = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{array}\right]$$

Quindi nel progetto dell'osservatore di ordine ridotto, la matrice $\mathbf{L}$ non potrà spostare l'autovalore $\lambda = -1$ della parte non osservabile, ma potrà agire solamente sull'autovalore della parte osservabile posizionandolo, come richiesto in -2.

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} -1-2l_1 & 2l_1 \\ -2-2l_2 & 1+2l_2 \end{array}\right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (\lambda+1+2l_1)(\lambda-1-2l_2) + 2l_1(2+2l_2) \\ &= \lambda^2 - 1 - 4l_1l_2 + 2l_1(\lambda-1) - 2l_2(\lambda+1) + 4l_1 + 4l_1l_2 \\ &= \lambda^2 - 1 + 2l_1\lambda - 2l_1 - 2l_2\lambda - 2l_2 + 4l_1 \\ &= \lambda^2 - 1 + 2(l_1\lambda - 2l_2\lambda - 2l_2 + 2l_1 \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza con il polinomio desiderato:

$$d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

si ottiene:

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

12. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t),\;\; y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove:} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

12.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori del 4 sottosistemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$.

12.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

12.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine intero (pieno) che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

12.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -10 & 10 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathbf{X}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio è nullo in quanto il vettore che genera $\mathcal{E}^-$ non è combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio $\mathcal{X}^+$, infatti la seguente matrice ha rango pieno

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{B}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{0\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_3 = 0, \qquad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è basata sulla matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

Il sistema dato è composto da una parte raggiungibile e osservabile $\mathcal{S}_1$ di dimensione 2 e da una parte non raggiungibile e non osservabile $\mathcal{S}_4$ di dimensione 1.

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{S}_4 = \{\mathbf{A}_{44},\ 0,\ 0\} = \{-1,\ 0,\ 0\}$$

Gli autovalori della parte $\mathcal{S}_1$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. L'autovalore della parte $\mathcal{S}_4$ è $\lambda = -1$.

12.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -4 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(s) = s^2 - 1 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}}(s) = (s+4)^2 = s^2 + 8\,s + 16$$

La matrice $\bar{K}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{K}} & = & \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & = & \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{4} - \alpha & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} + \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

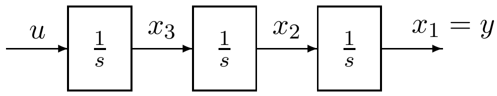
12.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè potrà agire solo sugli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\tilde{\mathbf{L}} \;=\; \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -10 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ si calcola nel modo seguente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 + \alpha \\ -2.375 + \alpha \end{bmatrix}$$

13. Sia dato il seguente sistema dinamico (cascata di tre integratori):



Scrivere il sistema nella forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$ che si ottiene mediante campionamento. Si ponga $T = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Una descrizione nello spazio degli stati del sistema dinamico dato è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

La matrice $\mathbf{F}$ del corrispondente sistema a segnali campionati è la seguente:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$ è invece la seguente:

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma & \frac{\sigma^2}{2} \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

14. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

essendo $\mathbf{x}(t)$ il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

14.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

14.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

14.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

14.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \mathrm{ker}\mathcal{O}^- = \mathrm{ker} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio coincide con il sottospazio $\mathcal{E}^-$, infatti la seguente matrice ha determinante nullo

$$\det \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_4 = 0$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sottosistema raggiungibile è composto dalle prime due componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_r} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_r} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

ed è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. La parte non raggiungibile è stabile: $\lambda_3 = -1$.

Il sottosistema osservabile è dato dalla prima e dalla terza componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Anche il sottosistema osservabile è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. La parte non osservabile è stabile: $\lambda_2 = -1$.

14.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -3 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire sintetizzando la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_r$ e quello della matrice $\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1\bar{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_r}(s) = s^2 - 1 \qquad \qquad \Delta_{\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1\bar{K}}(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

La matrice $\bar{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La stessa matrice $\bar{\mathbf{K}}$ poteva essere calcolata anche utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}(\mathbf{A}_r + 3\mathbf{I})^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 10 & \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

14.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè gli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\bar{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}} &= \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

In questo caso si ha che $\mathbf{L}_c = \mathbf{K}_c^T$ in quanto il polinomio caratteristico e il polinomio desiderato sono gli stessi del punto precedente. La matrice $\mathbf{L}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} l_1 \\ \beta \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ \beta - 8 \\ \beta - 20 \end{bmatrix}$$

dove β è un parametro arbitrario.

15. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

15.a) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

15.a) Il sistema non è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$ si determina calcolando una soluzione $\mathbf{x}_p$ e sommando ad essa il sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$. La soluzione $\mathbf{x}_p$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'insieme cercato degli stati iniziali è quindi il seguente:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

16. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

16.a) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

16.b) Portare il sistema in forma standard di osservabilità. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di "ordine pieno" che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

16.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{R}^+ = 8$$

Il sistema dato è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e che posiziona in -1 tutti gli autovalori del sistema. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ -1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + 3s = s^2(s+3)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è il seguente

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice $\mathbf{K}$ si calcola in base alla seguente formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

16.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare. Il sistema non è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato solo se la parte non osservabile è asintoticamente stabile. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti il sistema in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

La parte non osservabile è "semplicemente" stabile in quanto ha un autovalore nell'origine: $s = 0$. Non è quindi possibile giungere alla sintesi di un osservatore "asintotico" dello stato. In questo caso l'osservatore sarebbe "semplicemente stabile", cioè la stima dello stato sarebbe nota a meno di una costante che è funzione della condizione iniziale della parte non osservabile.

Il fatto che la parte non osservabile non fosse asintoticamente stabile poteva essere dedotto dal fatto che tutti e tre gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono sull'asse immaginario: $s_1 = 0$, $s_{1,2} = \pm\sqrt{3}j$.

17. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

17.a) Si determini se il sistema è osservabile e/o ricostruibile. Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

17.a) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente osservabile. Per verificare se il sistema è ricostruibile, occorre verificare se $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$:

$$\ker \mathbf{A}^3 = \ker \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La condizione $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$ è verificata per cui il sistema è ricostruibile.

L'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente relazione:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^- \mathbf{x}_0 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Il vettore $\bar{y}$ non è combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{O}^-$, per cui il sistema non ammette soluzioni. Non esiste quindi nessuna condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ compatibile con l'evoluzione libera assegnata.